T U T O R I A L : studio di funzioni

Studio grafico-analitico delle funzioni reali a variabile reale $\underset{x \mapsto y = f(x)}{f : R \to R}$

Sequenza dei passi utili allo studio di una funzione reale $y = f(x)$

In pratica

Stabilire se la funzione presenta delle simmetrie e/o è periodica.

» Se $y = f(x)$ è simmetrica rispetto all'asse y, deve verificarsi: $f(x) = f(-x)$.

» Se $y = f(x)$ è simmetrica rispetto all'origine degli assi, deve verificarsi: $-f(x) = f(-x)$.

Nel caso in cui la funzione sia simmetrica, si può restringere lo studio della funzione ai soli valori postivi e dunque costruire il grafico nel solo semipiano $x \geq 0$; per ottenere il grafico completo basterà simmetrizzare la curva ottenuta.

» Se $y = f(x)$ è periodica, si può limitare lo studio all'ampiezza del periodo.

Determinare il Campo di Esistenza, o Dominio, della funzione.

(Si tratta di individuare l'insieme dei punti x_i in cui la funzione non è definita).

Classifica il tipo di funzione:

» se è una funzione razionale intera il suo dominio è costituito da tutto l'asse Reale
» se la funzione è una razionale fratta, imponi che il denominatore sia diverso da zero.
I punti che annullano il denominatore della funzione non appartengono al suo CDE, per tali punti x_i la funzione non esiste; le rette verticali passanti per quei punti sono asintoti verticali per la curva;
» se la funzione è irrazionale, guarda l'indice del radicale:
» se è pari dovrai imporre che il radicando non sia negativo poichè la funzione è a valori Reali,
» se è dispari, non ci sono imposizioni.
» Se la funzione è logaritmica ricordati di imporre che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo.
» Se la funzione è esponenziale non ci sono imposizioni.
» Se la funzione è trigonometrica bisognerà imporre che gli argomenti della funzione tangente siano diversi da multipli dispari di angoli retti $\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$.

» Quando la funzione è composta da funzioni di tipo diverso tutte le imposizioni dovranno essere verificate contemporaneamente, ovvero le condizioni dovranno essere legate e condotte algebricamente come un sistema di equazioni.

Scrivi il dominio come UNIONE dei diversi intervalli in cui la funzione assume valori Reali.

Segna graficamente gli intervalli o i punti in cui la funzione non esiste.

Studiare con i limiti il comportamento della funzione agli estremi del CDE.

Calcola i limiti, sinistro e destro, della funzione nell'intorno dei punti x_i

$\lim_{x \to x_i} f(x) = \ldots$

e all'infinito

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ldots.$

Riporta con un segno grafico il comportamento della curva nell'intorno di tali punti.

Ricerca degli eventuali asintoti verticali e orizzontali

» Se $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$,

$x = c$ è un asintoto verticale.

» Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ (finito) ,

$y = l$ è un asintoto orizzontale

Ricercare l'eventuale intersezione della funzione con l'asse x

Poni a sistema l'equazione della curva con l'equazione dell'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

ovvero risolvi l'equazione $f(x) = 0$.

Ricercare l'eventuale intersezione della funzione con l'asse y

Poni a sistema l'equazione della curva con l'equazione dell'asse delle ordinate:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

ovvero calcola $y = f(0)$.

Studiare il segno della funzione

Studia la disequazione $f(x) > 0$.

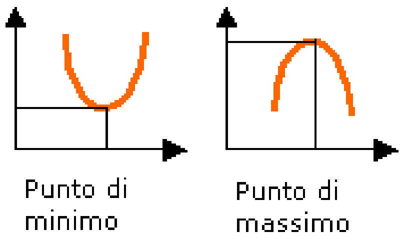
Negli intervalli in cui la funzione risulta positiva, la curva sarà situata sopra l'asse delle ascisse.
Riporta i risultati sul grafico, escludendo le zone che la curva non attraversa.

Calcolo delle derivate prima e seconda.
Il calcolo della derivata prima serve per determinare li intervalli in cui la funzione cresce o descresce, e per individuare i probabili punti di massimo e minimo relativi.
Il calcolo della derivata seconda serve per determinare gli intervalli in cui la curva è concava o convessa, e per individuare i probabili punti di flesso.

$y' = f'(x)$ = ...

$y'' = f''(x)$ = ...

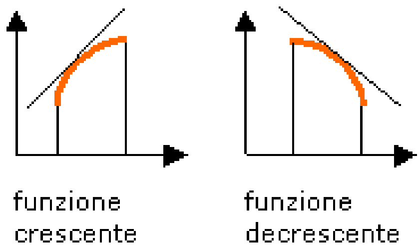
Ricerca degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo.



C.N. affinché un punto sia di massimo o di minimo relativo è che $y' = f'(x)$ = 0.

Dunque si tratta di risolvere tale equazione. I valori x_i che la soddisfano sono solo probabili punti di massimo o minimo relativi, in quanto potrebbero anche essere punti di flesso.
I punti in cui si annulla la derivata prima si dicono punti stazionari o punti critici.

Studio della monotonia della funzione



Per sapere se questi sono punti di massimo o di minimo per la curva si può procedere in due modi.

1° metodo: si studia il segno della derivata prima, ovvero si impone che $f'(x) > 0$.
Lo studio degli intervalli di monotonia, cioè dove la curva è crescente o decrescente, ci fa comprendere se i punti trovati sono di massimo o di minimo.
Se la derivata nell'intorno di tali punti non cambia di segno, questi non sono nè di massimo nè di minimo.

2° metodo: si sostituiscono le ascisse dei punti x_i nella derivata seconda e si guarda il segno che questa assume.

$f''(x_i) > 0$: se è positiva la concavità sarà rivolta verso l'alto perciò il punto è di minimo;

$f''(x_i) < 0$: se è negativa la concavità sarà rivolta verso il basso per cui il punto è un massimo.

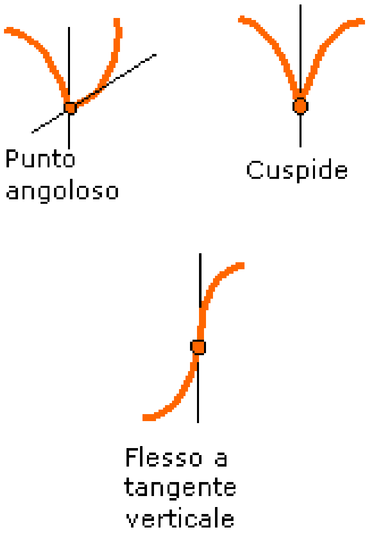
$f''(x_i) = 0$: se è nulla il punto è molto probabilmente di flesso.

Calcolo delle ordinate degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo

Sostituisci una alla volta le ascisse dei punti di massimo o di minimo nell'equazione della curva e ricava l'ordinata.

Riporta con un segno i risultati sul grafico.

Studio dei punti di non derivabiltà



Determina il Campo di Esistenza della derivata prima $y' = f'(x)$.

Se x_0 è un punto appartenente al CDE della funzione, ma è un punto di non derivabilità:

» se $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$ e $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ con $l \neq m$,

allora x_0 è un punto angoloso;

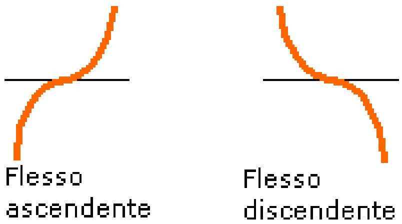
» se $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty$,

allora x_0 è una cuspide

» se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$,

allora x_0 è un flesso a tangente verticale

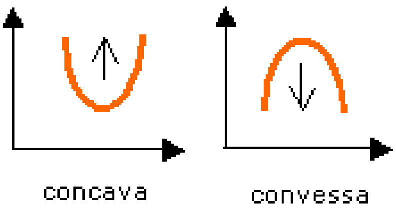
Ricerca degli eventuali punti di flesso



Imponi $f''(x) = 0$ e risolvi.

I valori che soddisfano l'equazione sono molto probabilmente le ascisse dei punti di flesso.

Studio della concavità e della convessità della funzione:



Studia il segno della derivata seconda: $f''(x) > 0$.

Negli intervalli in cui risulta positiva ($f''(x) > 0$), la curva rivolge la concavità verso l'alto (concava), in caso contrario ($f''(x) < 0$) verso il basso (convessa).

Le soluzioni di $f''(x) = 0$ sono le ascisse dei punti in cui la curva cambia la sua concavità, i punti di flesso, e la tangente si dispone orizzontalmente.

Calcolo delle ordinate degli eventuali punti di flesso

Sostituisci una alla volta le ascisse dei punti di flesso nell'equazione della curva e ricava l'ordinata corrispondente.

Riporta con un segno i risultati sul grafico.